

METODA MERȘULUI INVERS

În general o problemă din această categorie are ca cerință aflarea valorii inițiale a unei mărimi, valoare ce a fost supusă unor modificări succesive (prezentate în text), rezultatul final al acestor modificări fiind cunoscut.

Este vorba deci de aflarea unui număr necunoscut asupra căruia s-au efectuat anumite operații al căror rezultat este cunoscut.

Analizând textul problemei vom constata că pentru rezolvarea ei pornim de la ultima valoare cunoscută și aflăm succesiv valorile premergătoare ei până ajungem să aflăm valoarea inițială. Dacă textul sugerează anumite operații, într-o anumită ordine pentru rezolvarea problemei vom efectua de regulă operații inverse celor indicate de text și în ordinea inversă ordinii din text.

PROBLEME REZOLVATE

1. *M-am gândit la un număr, l-am împărțit la 4, la rezultat am adunat 8 iar din suma obținută înjumătățită am scăzut 5 și apoi am înmulțit cu 2 obținând 18. La ce număr m-am gândit?*

Rezolvare

Vom transforma problema compusă într-o succesiune de probleme simple:

„Ce număr înmulțim cu 2 ca să obținem 18?”

$$18 : 2 = 9$$

„Din ce număr scădem 5 ca să obținem 9?”

$$9 + 5 = 14$$

„Ce număr înjumătățim ca să obținem 14?”

$$14 \times 2 = 28$$

„Ce număr adunăm cu 8 ca să obținem 28?”

$$28 - 8 = 20$$

„Ce număr împărțim la 4 ca să obținem 20?”

$$20 \times 4 = 80$$

Observație: Problema poate fi pusă sub formă de „exercițiu” astfel:

$$[(x : 4 + 8) : 2 - 5] \times 2 = 18$$

la care avem rezolvarea:

$$(x : 4 + 8) : 2 - 5 = 18 : 2$$

$$(x : 4 + 8) : 2 = 9 + 5$$

$$x : 4 + 8 = 14 \times 2$$

$$x : 4 = 28 - 8$$

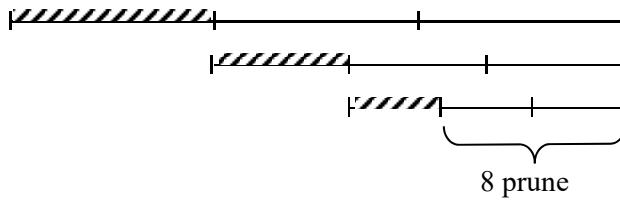
$$x = 20 \times 4$$

$$x = 80$$

Este și motivul pentru care în rezolvarea unor astfel de exerciții se spune că se folosește metoda mersului invers, ceea ce în multe situații este și adevărat.

- 2.** *Mama lasă într-o farfurie prune pentru cei trei copii ai săi. Fiecare vine și, neștiind dacă ceilalți au venit și au consumat din fructele lăsate de mama, consumă o treime din prunele pe care le găsește. Când vine mama constată că fiecare copil a mâncat prune și că au rămas 8 prune. Câte prune au fost la început?*

Schema



Rezolvare

- $8 : 2 = 4$ (prune reprezintă $1/3$ din ce a găsit al III-lea)
 $4 \times 3 = 12$ (prune a lăsat al II-lea)
 $12 : 2 = 6$ (prune, $1/3$ din ce a găsit al II-lea)
 $6 \times 3 = 18$ (prune a lăsat primul)
 $18 : 2 = 9$ (prune, $1/3$ din ce a găsit primul)
 $9 \times 3 = 27$ (prune a găsit primul copil)

Formularea acestei probleme, destul de des întâlnită la problemele din această categorie îndreptățește denumirea de „*probleme de rest din rest*“ care mai este folosită la astfel de probleme.

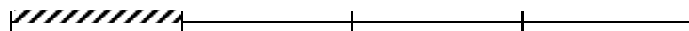
- 3.** *Mergând în excursie, un copil cheltuiește a șaptea parte din banii pe care-i avea și încă 2 lei în prima zi. A doua zi cheltuiește o pătrime din rest și încă 2 lei, iar a treia zi cheltuiește două cincimi din noul rest și încă 1 leu și-i mai rămân 5 lei. Ce sumă a avut copilul la început?*

Judecată și schemă rezultată

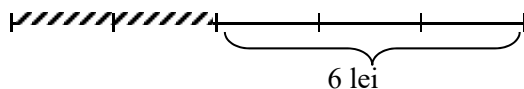
Dacă în prima zi cheltuia numai $1/7$ din sumă aveam:



Cum a cheltuit și cei 2 lei, după a doua zi, dacă ar fi cheltuit numai $1/4$ din rest ar fi avut:



Cheltuind și cei 2 lei a doua zi, dacă în a III-a zi cheltuia numai $2/5$ din ultimul rest am fi avut:



Rezolvare

$$5 + 1 = 6$$

$$6 : 3 = 2$$

$$2 \times 5 = 10$$

$$10 + 2 = 12$$

$$12 : 3 = 4$$

$$4 \times 4 = 16$$

$$16 + 2 = 18$$

$$18 : 6 = 3$$

$$3 \times 7 = 21$$

lei ar fi rămas dacă în a III-a zi cheltuia numai $\frac{2}{5}$ din rest

lei reprezintă $\frac{1}{5}$ din suma rămasă după a II-a zi

lei rămași a II-a zi

lei ar fi rămas dacă a II-a zi cheltuia

numai $\frac{1}{4}$ din ce a rămas după prima zi

lei, $\frac{1}{4}$ din suma rămasă după prima zi

suma rămasă după prima zi

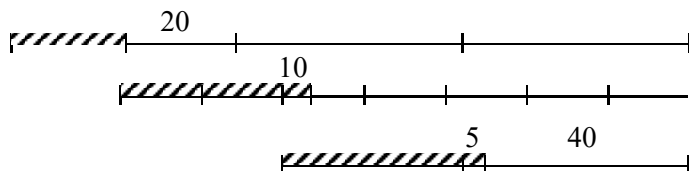
lei, sumă ce ar fi rămas după prima zi dacă cheltuia numai $\frac{1}{2}$ din sumă

lei, $\frac{1}{7}$ din suma avută

lei, suma avută

4. *O fermă avea de însămânțat o suprafață de grâu în 4 zile. În prima zi însămânțează cu 20 ha mai puțin decât $\frac{1}{3}$ din întreaga suprafață. A doua zi însămânțează cu 10 ha mai mult decât două șeptimi din suprafața care-i mai rămăsese. A treia zi însămânțează cu 5 ha mai mult decât jumătate din suprafața rămasă după a II-a zi. În a patra zi însămânțează ultimele 40 ha. Câte hectare a însămânțat în total?*

Schema de mai jos sugerează suprafețele ce rămăneau de însămânțat la începutul fiecărei zile și o **judecată** asemănătoare problemei precedente.



$$40 + 5 = 45$$

(ha, ar fi rămas dacă a III-a zi s-ar fi însămânțat numai $\frac{1}{2}$ din R_2)

$$45 \times 2 = 90$$

(ha, reprezintă R_2)

$$90 + 10 = 100$$

(ha ar fi rămas dacă a II-a zi s-ar fi însămânțat numai $\frac{2}{7}$ din R_1)

$$100 : 5 = 20$$

(ha reprezintă $\frac{1}{7}$ din R_1)

$$20 \times 7 = 140$$

(ha reprezintă R_1)

$$140 - 20 = 120$$

(ha ar fi rămas dacă în prima zi s-ar fi arat și cele 20 ha)

$$120 : 2 = 60$$

(ha reprezintă $\frac{1}{3}$ din S)

$$60 \times 3 = 180$$

ha este S

Observație: Problemele 3 și 4 sunt evident mai complexe și necesită formularea unor ipoteze de către rezolvitor, ipoteze ce pot fi deduse din text.

La ultimele 3 exemple asocierea metodei figurative ușurează mult găsirea „drumului“ ce trebuie parcurs pentru rezolvarea fiecărei probleme.

PROBLEME PROPUSE

- 1.** Mă gândesc la un număr. Îl înmulțesc cu 7, scad 20 din rezultat, împart noul rezultat la 4 și scad 1 din ultimul rezultat și obțin 8. Care a fost numărul inițial?
- 2.** La ce număr am adunat 10 dacă un sfert din rezultat este 15?
- 3.** Dacă mărim de 3 ori a patra parte dintr-un număr, iar rezultatul îl mărim cu 20 și apoi micșorăm de 5 ori noul rezultat, obținem 7. Care este numărul?
- 4.** Întreitul unui număr micșorat cu 6 a fost împărțit la 3 iar câțul obținut a fost mărit cu 10 și s-a obținut 17. Care a fost numărul?
- 5.** Dacă mărim un număr de 5 ori, rezultatul îl mărim cu 5, noul rezultat îl micșorăm de 5 ori și apoi scădem 5 din ultimul rezultat obținem 7. Care a fost numărul?
- 6.** Vlad s-a gândit la un număr. L-a mărit cu 15, a triplat rezultatul, a scăzut 20 din noul rezultat și a împărțit ce a mai rămas la 4, obținând 10. La ce număr s-a gândit Vlad?
- 7.** Un negustor ambulant s-a dus la târgurile organizate în trei localități. În prima localitate și-a triplat suma cu care venise de acasă și a cheltuit 50 de dolari. În a doua localitate și-a dublat suma ce o avea asupra sa și a cheltuit 60 de dolari. În a treia localitate și-a mărit de 4 ori suma ce-o avea asupra sa și a mai cheltuit 100 dolari rămânând 220 de dolari. Cu ce sumă a intrat negustorul în primul târg?
- 8.** Dacă dau drumul la o minge să cadă liber, ea sare la o înălțime de două ori mai mică decât înălțimea de la care i-am dat drumul. Dau drumul la o minge și o las să atingă pământul și să sară în sus de 3 ori. A treia oară s-a ridicat la un metru. De la ce înălțime i-am dat drumul?
- 9.** Două cincimi din totalul de perechi de încălțăminte existente într-un magazin sunt pentru bărbați, $\frac{2}{5}$ din rest sunt pentru femei, iar restul de 108 perechi sunt pentru copii. Câte perechi de încălțăminte sunt în magazin?
- 10.** Un turist și-a propus să străbată un traseu montan în 4 zile. În prima zi străbate $\frac{1}{5}$ din lungimea traseului, a doua zi $\frac{1}{3}$ din rest, a treia zi jumătate din noul rest, iar în ultima zi străbate 24 km. Ce lungime are traseul?
- 11.** Din călătorii existenți într-un autobuz la prima oprire coboară 10 și urcă 12. La a doua oprire coboară $\frac{1}{4}$ din cei existenți și urcă 15. La a treia oprire coboară $\frac{1}{3}$ din pasageri și urcă 6. La destinație ajung 32 de călători. Câți pasageri erau la început în autobuz?

- 12.** Un biciclist parcurge un drum de o anumită lungime în 4 zile. În prima zi parcurge $\frac{1}{4}$ din drum și încă 10 kilometri. A doua zi parcurge $\frac{2}{5}$ din rest. A treia zi parcurge $\frac{1}{3}$ din noul rest și încă 12 km. În a patra zi parcurge ultimii 44 km. Care era lungimea drumului?
- 13.** Avem două urne cu bile A și B. Luăm din urna A atâtea bile câte sunt în urna B și le punem în urna B. Luăm apoi din urna B atâtea bile câte au rămas în A și le punem în urna A. În final punem din urna A în urna B atâtea bile câte sunt deja în B și ajungem astfel că ambele urne au câte 56 bile. Câte bile erau la început în fiecare urnă?
- 14.** Un copil a citit o carte în 4 zile. În prima zi a citit cu 40 de pagini mai puțin decât $\frac{1}{3}$ din numărul paginilor. A doua zi a citit $\frac{1}{3}$ din rest, a treia zi a citit jumătate din noul rest, iar a patra zi a citit ultimele 80 de pagini. Câte pagini are cartea?
- 15.** Aflat în excursie, un copil cheltuiește în prima zi cu 5 lei mai puțin decât jumătatea sumei pe care o avea. A doua zi cheltuiește cu 1 leu mai puțin decât jumătatea din rest. A treia zi cheltuiește ultimii 7 lei. Ce sumă a cheltuit copilul în excursie?
- 16.** Din totalul problemelor pe care le avea de rezolvat pentru vacanță, un copil rezolvă în prima zi $\frac{1}{4}$ și încă 5 probleme. A doua zi rezolvă $\frac{1}{4}$ din rest și încă 3 probleme. A treia zi rezolvă $\frac{1}{3}$ din noul rest și încă 2 probleme. A patra zi rezolvă $\frac{1}{2}$ din problemele care i-au mai rămas și ultimele 5 probleme. Câte probleme a rezolvat în total?
- 17.** Din totalul suprafeței cultivate cu cereale de o unitate agricolă $\frac{1}{3}$ și încă 40 ha sunt semănate cu grâu, $\frac{1}{2}$ din rest cu porumb, cu 20 ha mai puțin decât jumătatea noului rest cu secară și 160 ha cu orz. Care este suprafața semănată cu cereale?
- 18.** Din cantitatea de mere cu care a venit la târg, un țăran vinde succesiv un sfert din cantitate, 3 kg, a treia parte din ce i-a mai rămas, 4 kg, jumătate din ce i-a mai rămas, 2 kg și se întoarce acasă cu 8 kg. Cu câte kilograme de mere venise la târg?
- 19.** În trei vase A, B, C se află cantități diferite de apă. Turnăm jumătate din apa existentă în vasul A în cantități egale în celelalte vase. Turnăm apoi jumătate din cantitatea existentă în vasul B în cantități egale în celelalte 2 vase. Turnăm în final jumătate din cantitatea existentă în vasul C în cantități egale în celelalte vase și astfel în fiecare din cele trei vase vom avea 16 l. Ce cantități au fost la început în cele 3 vase?

TESTE DE SELECȚIE

Testul 1

1. Din 27 de litri de lapte se obțin 3 kg de smântână, iar din 20 kg de smântână se obțin 10 kg de unt. Câți litri de lapte sunt necesari pentru a obține 90 kg de unt?
2. Puneți parantezele acolo unde trebuie astfel încât egalitatea:
 $5 \times 4 : 2 + 8 - 2 = 0$ să fie adevărată.
3. Aflați a din egalitatea: $10 + 3 \times (150 - 125) + a \times (182 - 148) - 155 = 474$.
4. O carte costă 9 lei și încă un sfert din prețul ei. Cât costă cartea?

Testul 2

1. Aflați-l pe x din egalitatea: $1\ 000 - [x : 5 \times (708 - 609)] - 109 = 0$.
2. Ionel cumpără de la librărie câteva caiete de 80 de bani bucata și tot atâtea caiete de 2 lei bucata, plătind pe acestea din urmă cu 4 lei și 80 de bani mai mult decât pe cele de 80 de bani bucata. Câte caiete a cumpărat Ionel?
3. Un copil cumpără 3 caiete, 4 creioane și 2 gume, plătind 12 lei. Știind că un caiet costă cât 2 gume, iar 3 creioane costă cât 4 gume, să se afle cât costă un caiet, o gumă și un creion.
4. Un concurs de tenis se desfășoară în sistem eliminatoriu (cine pierde iese din concurs). Câte meciuri se desfășoară pentru desemnarea câștigătorului dacă au fost 26 de concurenți?

Testul 3

1. Determinați a din egalitatea: $500 + 280 : 4 - [a : 5 + 4 \times (20 + 12 + 18)] = 234$.
2. Lungimea unui dreptunghi este cu 10 m mai mare decât lățimea. Dacă mărim lățimea cu 6 m și micșorăm lungimea cu 4 m se obține o figură cu perimetrul de 40 m. Care este aria dreptunghiului inițial?
3. Calculați: $\frac{3}{5} + \frac{8}{5} - \frac{6}{5} + \frac{18}{8} - \frac{2}{8} + \frac{4}{7}$.
4. La un magazin s-au vândut caiete cu 2 lei bucata și creioane cu 1 leu bucata. Numărul caietelor vândute a fost de 3 ori mai mare decât al creioanelor. Știind că s-au încasat 427 de lei, câte caiete și câte creioane s-au vândut?

Testul 4

1. Să se afle a din egalitatea: $2 + 40 + [15 \times (a + 3) + 5] : 7 : 5 = 46$.
2. 10 oameni se întâlnesc și dau noroc, fiecare cu fiecare. Câte strângeri de mână se realizează?

3. De-a lungul gardului din fața școlii sunt 11 pomi. Ce distanță este între primul și ultimul pom dacă între al doilea pom și al șaptelea pom sunt 20 m?
4. 5 copii aveau fiecare același număr de nuci. După ce fiecare mănâncă 8 nuci le mai rămân în total tot atâtea nuci cât aveau fiecare la început. Câte nuci aveau fiecare la început?

Testul 5

1. Ana a cumpărat odată creioane de 16 lei, iar altă dată creioane de același fel plătind 10 lei. Cât costă 7 creioane dacă ultima dată a cumpărat cu 3 creioane mai puțin ca prima dată?
2. Să se afle a din egalitatea: $8 + 6 : [3 \times (76 - 25 \times 3) - (88 - a \times 17) : 3] : 3 = 9$.
3. Unui număr natural îi atașăm la sfârșit cifra 0, iar apoi scădem din el numărul inițial și obținem 180 ca rest. Care a fost numărul inițial?
4. Într-un vas sunt de 4 ori mai multe prune decât mere. Fiecare din persoanele așezate la masă consumă 2 mere și 3 prune și mai rămân în vas 2 mere și 33 de prune. Câte persoane erau la masă?

Testul 6

1. Determinați pe a din: $[824 : 2 + (1\ 475 - 1\ 375) : a] + (5\ 040 - 1\ 350) : 3 = 1\ 662$.
2. Pentru a face compot, o gospodină taie 48 de mere în două, după care jumătate din numărul bucăților le mai taie o dată în două, iar apoi jumătate din numărul total de bucăți le taie iarăși în două. Câte bucăți de mere are gospodina pentru compot?
3. Suma dintre descăzutul, scăzătorul și diferența unei scăderi este 9 868. Aflați descăzutul.
4. Într-o sală sunt mai multe vase pentru flori. Dacă în fiecare vază s-ar pune câte 5 flori, o vază ar rămâne goală și o vază cu numai 3 flori. Dacă s-ar pune câte 7 flori, 4 vase ar rămâne goale și o vază numai cu 4 flori. Câte vase și câte flori erau?

Testul 7

1. Aflați pe x din egalitatea: $10 + 10 \times [480 - 150 : 5 \times (x : 3 : 2)] : 4 = 760$.
2. Un dreptunghi și un pătrat au același perimetru. Dreptunghiul are lungimea 180 m și lățimea de trei ori mai mică decât lungimea. Aflați aria pătratului.
3. În 4 cutii se află același număr de creioane. Dacă se scot din fiecare cutie câte 9 creioane, atunci în toate cutiile rămân atâtea creioane câte erau la început în fiecare cutie. Aflați câte creioane erau la început în fiecare cutie.
4. Un gospodar are hrană pregătită pentru 3 găște și 36 de găini timp de 60 de zile. Cantitatea zilnică de hrană necesară unei găște este de trei ori mai mare decât cea necesară unei găini. Știind că gospodarul vinde cele trei găște, aflați pentru câte zile îi va ajunge hrana pentru cele 36 de găini.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

METODA FIGURATIVĂ

1. 52 de timbre românești; 28 de timbre străine. 2. 200 de pagini; 115 pagini. 3. 34 rânduri; 21 rânduri. 4. 248; 173. 5. 56 cărți; 42 cărți. 6. 63 kg; 51 kg; 60 kg. 7. 53; 67. 8. 14 elemente; 11 elemente. 9. 106; 94. 10. 51; 19. 11. 50; 52; 54. 12. 289; 255. 13. 9; 54. 14. 67; 76. 15. 170; 185. 16. 200; 100 (Se aplică de două ori metoda figurativă: prima dată se află suma și diferența, iar a doua oară numerele.). 17. 25; 27; 29. 18. 26; 28; 30. 19. 188; 190; 192. 20. 56; 58; 60; 77. 21. 29; 31; 33; 17. 22. 111; 41. 23. 104; 122; 116. 24. 52; 54; 56; 58. 25. 15; 17; 19 (Numerele adunate); 44; 46; 48 (Numerele obținute). 26. 32; 34; 36; 38. 27. 71; 90; 180. 28. 48; 24. 29. 351 de caiete dictando; 117 caiete matematică. 30. 846; 141. 31. 25. 32. 32; 8. 33. 30; 6. 34. 4; 20. 35. 35; 105. 36. 14; 56. 37. 975. 38. 568; 426. 39. a) 6 creioane; b) 3 pixuri. 40. 35. 41. 20. 42. 35 de piersici; 25 de piersici. 43. 45; 135. 44. 54; 18. 45. 2 lei. 46. 3 lei. 47. 15 lei. 48. 2 lei. 49. 14. 50. 9; 63. 51. 99; 396. 52. 15. 53. 185; 46. 54. 14 lei; 56 lei. 55. 114; 228; 342. 56. 2 lei. 57. 95; 190; 380. 58. 299; 42. 59. 299; 42. 60. 448. 61. 248. 62. 227 peri; 454 meri; 274 pruni. 63. 200; 156; 174. 64. 75 capete. 65. 200; 250; 300. 66. 16; 8; 24; 31 bomboane. 67. 280; 70; 350 pâini. 68. 210 kg; 70 kg; 210 kg. 69. 285; 95; 190 pagini. 71. 440; 220; 312. 72. 56; 168; 38. 73. 19; 57; 45. 74. 5 535. 75. 33; 32; 9; 8 ani. 76. 32; 30; 6; 4 ani. 77. 38; 40. 78. 176; 44. 79. 58; 174; 29. 80. 96; 24; 87. 81. 152; 304; 104. 82. 160; 80; 480. 83. 168 km; 252 km; 210 km. 84. 12. 85. 45. 86. 85 *l*; 113 *l*; 299 *l* vin. 87. 100 găini; 50 oi; 25 iepuri. 88. 70. 89. 156; 175; 331. 90. 300 km. 91. 480 km. 92. 240 km; 160 km; 80 km; 480 km. 93. 72 km; 36 km; 60 km; 168 km. 94. 222; 148. 95. 60 de bani. 96. 405. 97. 332. 98. 100. 99. 740. 100. 115. 101. 324. 102. 90. 103. 15; 16; 17. 104. 24. 105. 15. 106. 32. 107. 56, 84. 108. 88. 109. 80. 110. 90. 111. 470. 112. 600; 400. 113. 126; 54. 114. 4 mere; 1 pară. 115. 84 nuci; 28 nuci. 116. 50 kg; 22 kg. 117. 52; 44. 118. 150 cărți; 130 cărți. 119. 85. 120. 90. 121. 30. 122. 18. 123. 108; 72. 124. 63 kg; 66 kg; 61 kg. 125. 161; 166; 170; 156. 126. 158; 165. 127. 28; 56. 128. 168; 48. 129. 348; 464. 130. 289; 195. 131. 100; 200. 132. 77 fotbal; 52 handbal; 35 volei. 133. 370; 222. 134. 96; 108. 135. 20. 136. 110; 156. 137. 15; 45. 138. 80; 40. 139. 145; 104. 140. 4321; 8642. 141. (24; 76); (25; 79); (26; 82); (27; 85). 142. (6; 12; 11); (7; 14; 12); (8; 16; 13). 143. 40; 38; 14; 12. 144. 38; 150. 145. 63; 9. 146. Se împarte întregul în 6 părți. Jumătatea reprezintă trei părți, treimea 2 părți. Cele 5 părți reprezintă 20. O parte = 4; $4 \times 6 = 24$ numărul. 147. 18. 148. 23 de fotbaliști; 12 voleibaliști. 149. 375; 625. 150. a) 24; b) 44; c) 35; d) 14; e) 18; f) 24; g) 18; h) 45; i) 3.

METODA REDUCERII LA UNITATE

1. *Indicație:* Împărțim cantitățile de 2 000 kg grâu, respectiv 3 500 kg grâu în grupe de câte 500 kg. Reducerea la unitate constă în aflarea cantității de făină care se obține dintr-o „grupă” de 500 kg grâu. *Răspuns:* 5 000 kg. 2. 10 ore. 3. 8 iepuri. 4. 600 persoane. 5. 10 cutii. 6. 90 pungi. 7. 10 tăvi. 8. 720 timbre. 9. 500 pungi. 10. 180 pupitre. 11. 270 caiete. 12. 1 240 panseluțe. 13. 72 spectatori. 14. 300 pâini. 15. 60 ouă. 16. *Indicație:* Observăm mai întâi că în locul a 2 saci mari putem confec-